

1)

a) Die gemeinsame Dichtefunktion ~~von~~ der Normalverteilung ist:

$$f^X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Die Likelihoodfunktion ist demnach

$$f_{\sigma}^{(x_1, \dots, x_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Likelihoodfunktion:

$$L_{(x_1, \dots, x_n)}(\sigma) := f_{\sigma}^{(x_1, \dots, x_n)} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \log L_{(x_1, \dots, x_n)}(\sigma) &= \log \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\ln 1 - \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(-\ln \sqrt{2\pi} - \ln \sigma - \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

Ableitungen bestimmen und nullsetzen

$$\sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sigma} + \frac{(\mu - x_i)^2}{\sigma^3} \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{(\mu - x_i)^2}{\sigma^3} = 0$$

$$\hat{\sigma}_{ML} = \bar{x}$$

2)

a) Ein-Stichproben ~~Lebens~~-test H_0 : Durchschnitt liegt bei 5 ~~$\mu = 5$~~ $\mu = 5$ H_1 : Durchschnitt liegt nicht bei 5 $\mu \neq 5$ $\alpha = 0,05$ $\bar{x} = 5,8$ $s^2 = 2,25$ $n = 10$

$$Z(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - 5}{s}$$

$$= \sqrt{10} \frac{5,8 - 5}{2,25}$$

$$= 7,24$$

U1-0,05 in Tabelle

$$P(Z) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } |Z| \leq 0,9075 \\ 1, & \text{wenn } |Z| > 0,9075 \end{cases}$$

$$P(7,24) = 1$$

Der Test bestätigt die Aussage 1: $\mu \neq 5$.

b) Zweistichproben t-Test

$$N = 10 \quad n = 7$$

$$H_0: \mu_x - \mu_y \geq d_0$$

$$d_0 = 0$$

$$H_1: \mu_x - \mu_y \leq d_0$$

$$\text{Teststatistik } T = \frac{\bar{x} - \bar{y} - d_0}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}}$$

$$= 5,8 - 4,7$$

$$\sqrt{\frac{2,25}{10} + \frac{2,25}{7}}$$

$$= 2,64$$

$$k = \sqrt{\frac{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}{\frac{1}{n-1} \left(\frac{s_x^2}{n}\right)^2 + \frac{1}{m-1} \left(\frac{s_y^2}{m}\right)^2}}$$

$$= \frac{0,225 + 0,1875}{0,111 \cdot 0,225^2 + 0,09 \cdot 0,1875^2}$$

$$= 46 \quad ?$$

$$f(T) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } T \geq 7,729 \\ 1, & \text{wenn } T < 7,729 \end{cases} \quad f(T) = 0$$

nachgewiesen
Es kann nicht ~~wiedergelegt~~ werden,
das Gerbmom besser als kritisch ist.

2c) Einseitige t-Test

$$H_0: \mu_0 \geq 0$$

$$H_1: \mu_0 < 0$$

$$s_0^2 = 0,0625$$

c) Einseitige t-Test

$$H_0: \mu_0 = 0$$

$$H_1: \mu_0 \neq 0$$

$$s_0^2 = 0,0625$$

$$n = 10$$

$$T = \sqrt{n} \frac{0,2 - 0}{0,0625}$$

$$= 10,72$$

$$p(T) = \int_{-\infty}^{\infty} f(T) dT$$

$$f(T) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } |T| > 2,26 \\ 1, & \text{wenn } |T| \leq 2,26 \end{cases}$$

$$p(T) = 1$$

Die Biere werden nicht gleich bewertet.

3)

$$H_0: \text{med}(x) \leq \text{med}(y)$$

$$H_1: \text{med}(x) > \text{med}(y)$$

1. Gemeinsame Stichprobe erstellen mit Rängen:

$$7,22, 7,28, \cancel{7,49}, 7,79, 2,04, 2,20, 2,55, 2,61, 2,97$$

$$R=1 \quad R=2 \quad \cancel{R=3} \quad R=3 \quad R=4 \quad R=5 \quad R=6 \quad R=7 \quad R=8 \quad R=9$$

$$3,01, 3,27, 3,47$$

$$R=10 \quad R=11 \quad R=12$$

2. Teststatistik:

$$T_w = \sum_{i=1}^n R(x_i) = 1 + 11 + 2 + 4 + 9 + 7 = 34$$

gewählt als 0,9901

$$P(T_w) = \begin{cases} 0, & T_w \leq 32 \\ 1, & T_w > 32 \end{cases}$$

Der kritische Wert ist ~~32~~ 32.

$$P(34) = 1$$

Da T_w größer als 32 ist kann H_0 abgelehnt werden.

$\text{med}(x)$ ist größer als $\text{med}(y)$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 99%.